Застосування похідної для дослідження функції та побудови її графіка

Пригадаємо основні властивості функції

ФУНКЦІЯ – це залежність, при якій кожному елементу множини X ставиться в відповідність єдиний елемент множини Y, тобто встановлена взаємно однозначна відповідність між елементами цих двох множин.

Позначають функцію $y = f(x)$,

де x **– незалежна змінна (аргумент),**

y **– залежна змінна (функція)**

та кажуть, що змінна y **функціонально залежить від змінної** x

Пригадаємо…

1. Область визначення функції – множина всіх значень, яких набуває аргумент (тобто множина X) і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

2. Область значень функції – множина всіх значень, яких набуває залежна змінна (тобто множина Y) і позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Область визначення і область значень записуються в вигляді проміжків:

$D(y) = x \in (\ldots)$ $E(y) = y \in (\ldots)$

Парність-непарність функції (симетричність функції)

Щоб дослідити функцію на парність чи непарність необхідно:

а) знайти <u>область визначення</u> даної функції та встановити, <u>чи симетрична вона відносно початку координат</u>, тобто чи містить область визначення значення x разом зі значенням $-x$

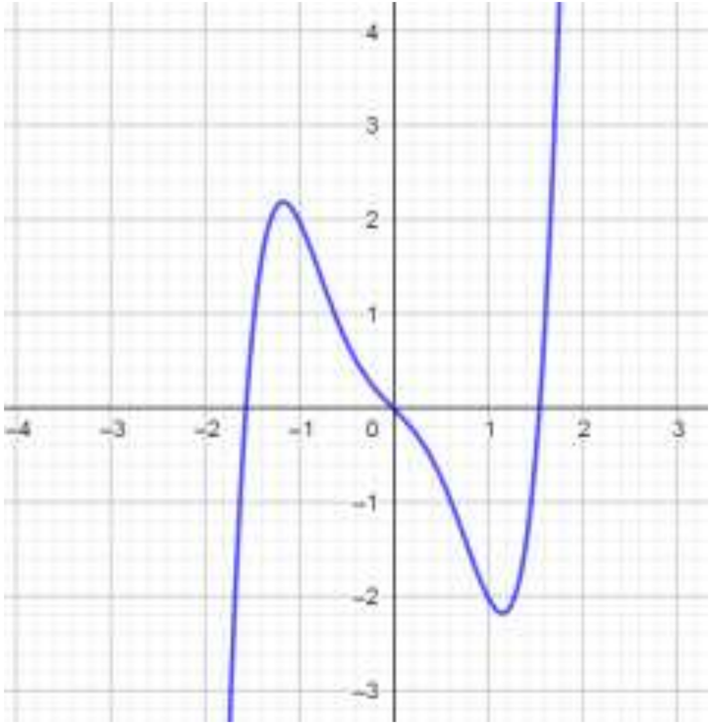
Парність-непарність функції

Якщо область визначення <u>симетрична</u>

Шукаємо значення $f(-x)$:

для цього у рівняння функції замість x підставимо $-x$.

- якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція – <u>непарна</u> і її <u>графік симетричний відносно початку координат</u>



Парність-непарність функції

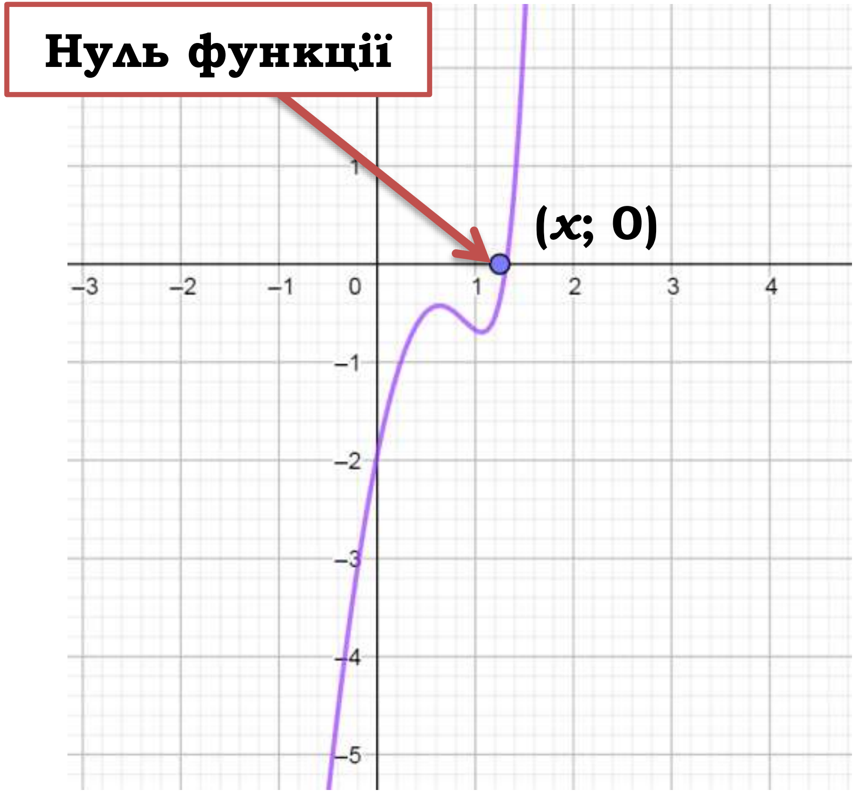
область визначення

симетрична,
але не виконується жодна з наведених рівностей

несиметрична
нічого шукати не потрібно

ФУНКЦІЯ Є НІ ПАРНОЮ, НІ НЕПАРНОЮ

Нулі функції -

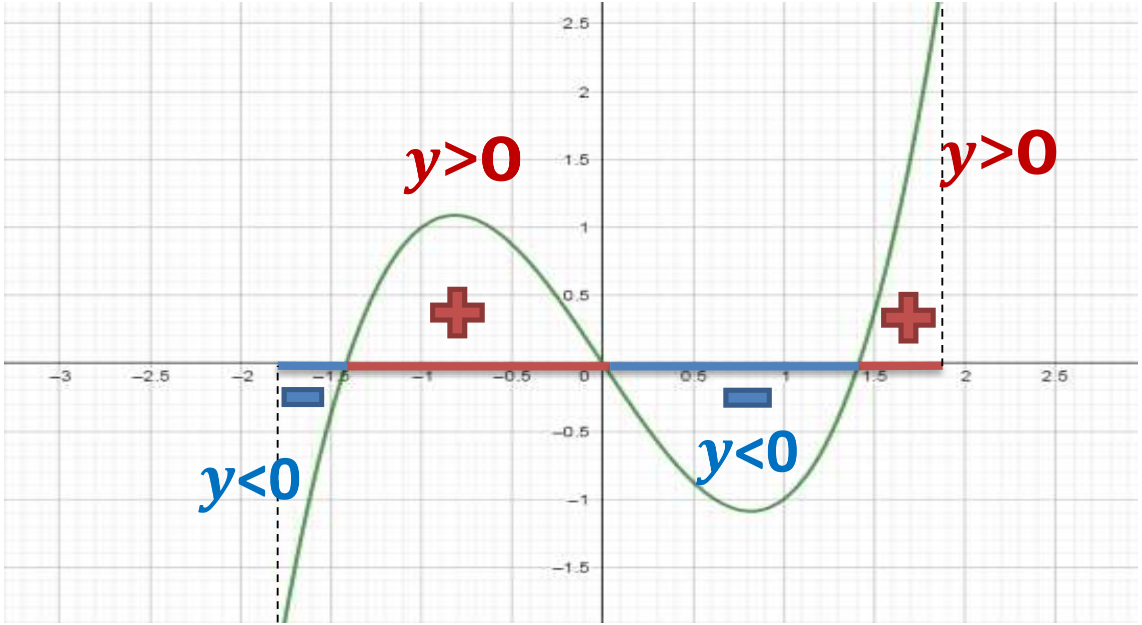


це значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю.

Щоб знайти нулі функції, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Отримані точки з координатами $(x; 0)$ є точками перетину графіка функції з віссю абсцис.

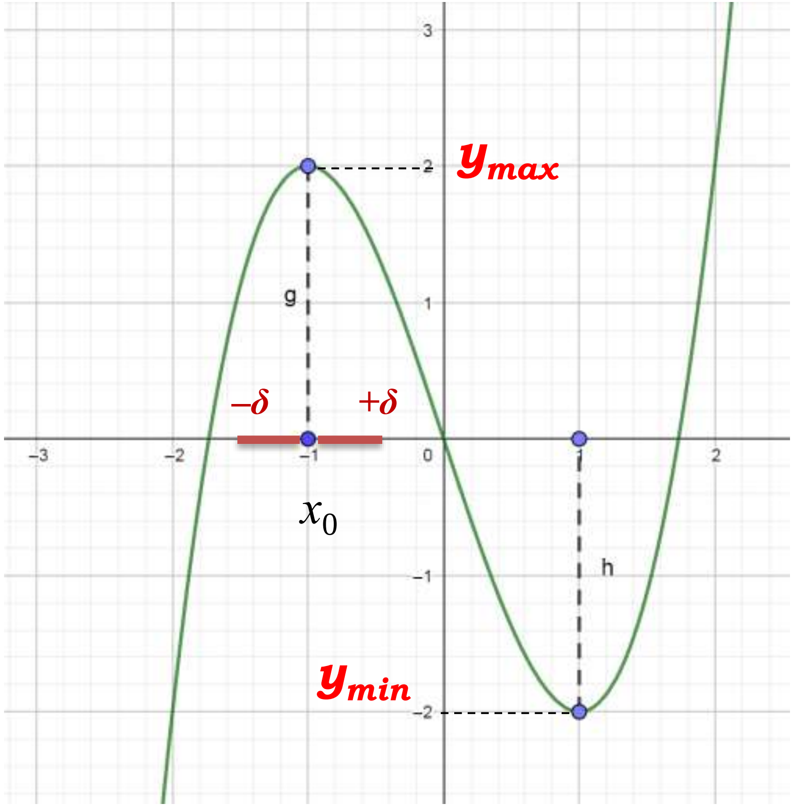
Проміжки знакосталості -

це проміжки, на яких функція набуває значень однакового знаку.



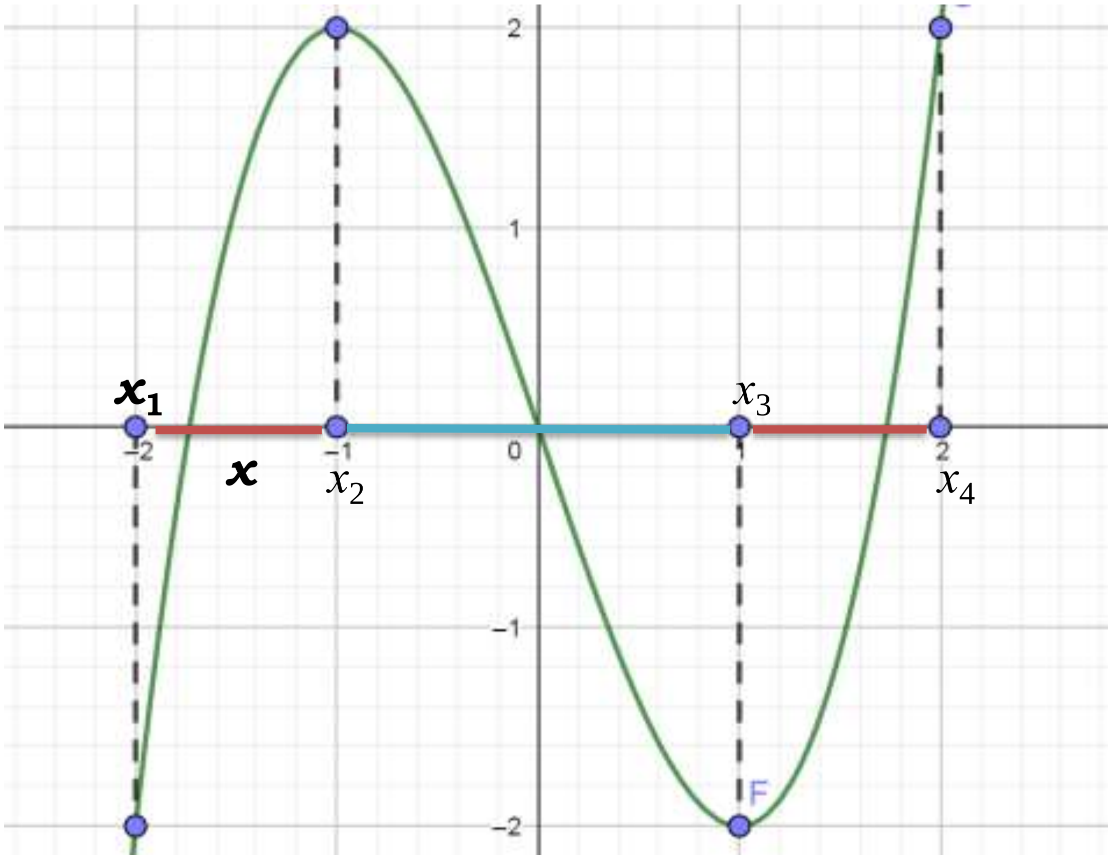
Щоб знайти проміжки знакосталості достатньо розв’язати нерівності $f(x) > 0$ та $f(x) < 0$.

Екстремуми функції

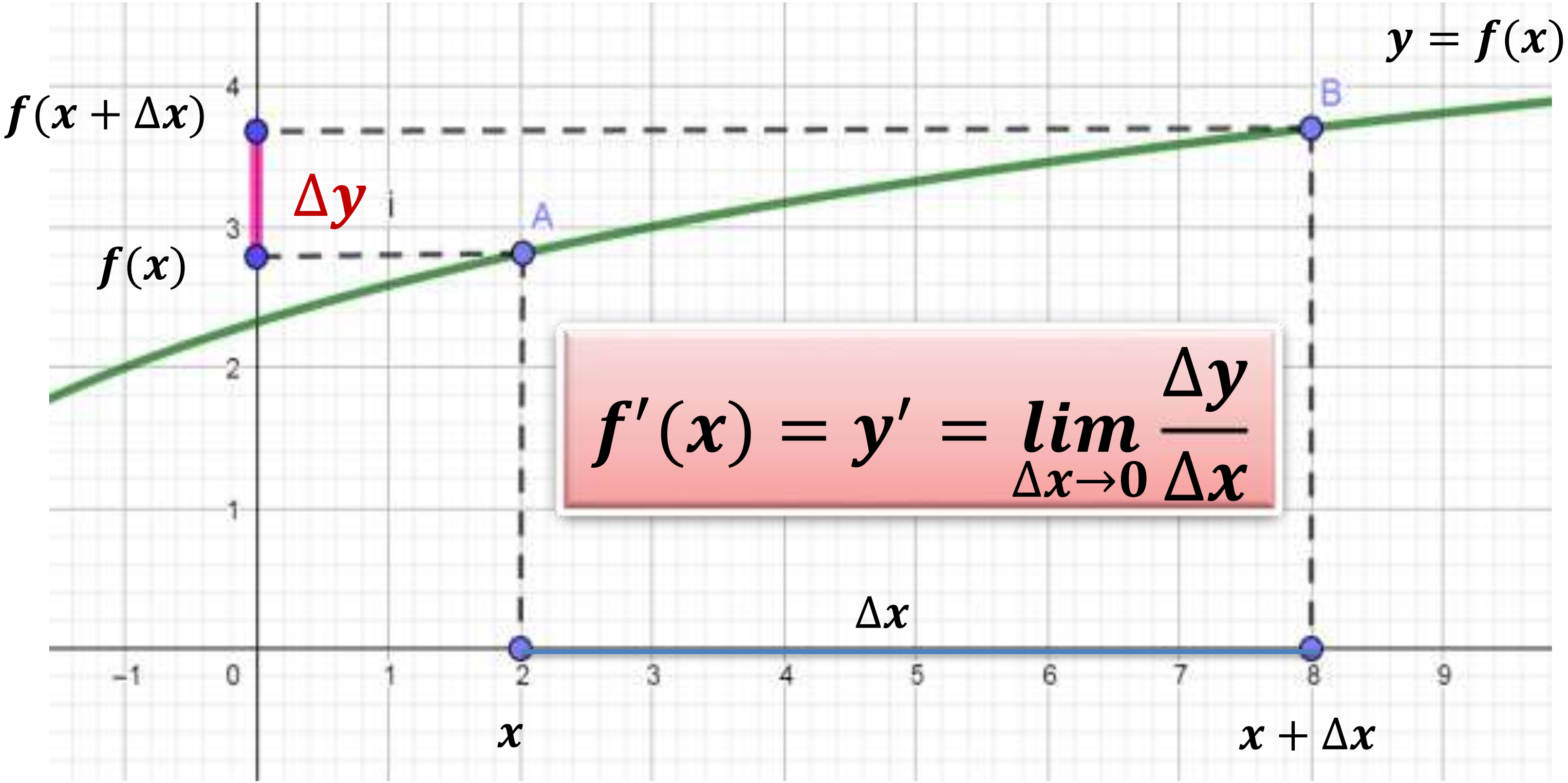


Екстремуми функції –
це значення функції в точках максимуму та мінімуму

Проміжки монотонності функції



Похідна функції



$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Умови зростання або спадання функції

1. **Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці інтервалу (a; b), то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.**

2. **Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці інтервалу (a; b), то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.**

3. **Якщо $f'(x) = 0$ в кожній точці інтервалу (a; b), то функція $f(x)$ є сталою на цьому інтервалі.**

Внутрішні точки області визначення функції, в яких <u>похідна дорівнює нулю або не існує</u>, називаються критичними точками функції.

Схема дослідження функції на монотонність

1. Знайти область визначення функції $f(x)$.
2. Знайти похідну цієї функції $f'(x)$
3. Знайти критичні точки функції (з'ясувати, в яких точках похідна дорівнює 0 або не існує)
4. Розв'язавши нерівності $f'(x) > 0$ та $f'(x) < 0$, знайти знак $f'(x)$ в кожному з отриманих проміжків (знак можна визначити, обчисливши значення $f'(x)$ в будь-якій точці проміжка)

Дослідити функцію $y = 4x^3 + 6x^2 - 8$ на монотонність

1) Знайдемо область визначення функції

$D(y) = R$

2) Знайдемо похідну

$$y' = 12x^2 + 12x = 12x(x+1)$$

3) Знайдемо критичні точки

$$12x(x+1) = 0,$$

$$x = 0, \quad x = -1$$

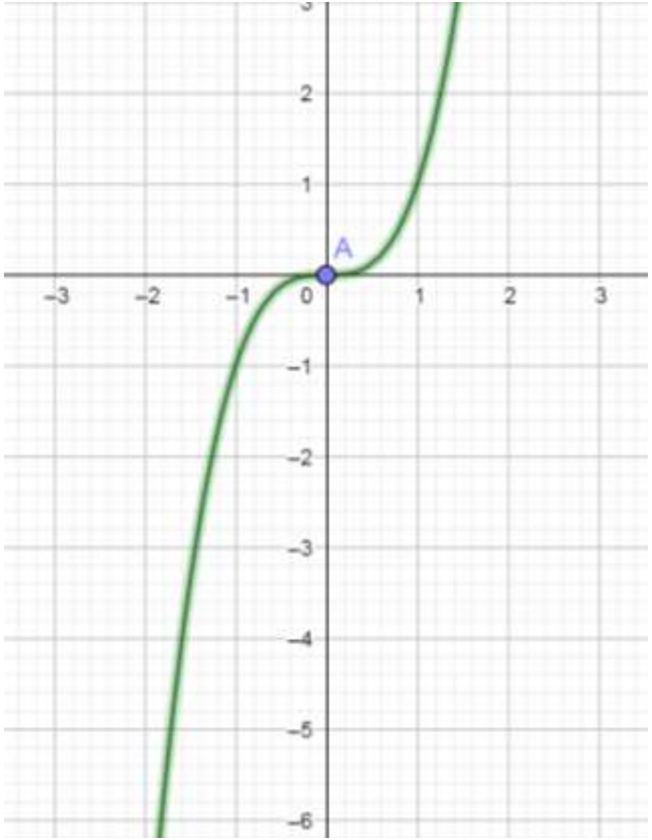
4) Позначимо критичні точки на області визначення функції та знайдемо знак похідної на кожному з отриманих проміжків.

$$12x(x+1) > 0, \qquad 12x(x+1) < 0$$

x

проміжки: зростання $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$, **спадання** $x \in [-1;\ 0]$

Дослідження функції



Розглянемо функцію $y = x^3$.

Її похідна $y' = 3x^2$.

Одна критична точка $x = 0$.

Похідна в цій точці дорівнює 0

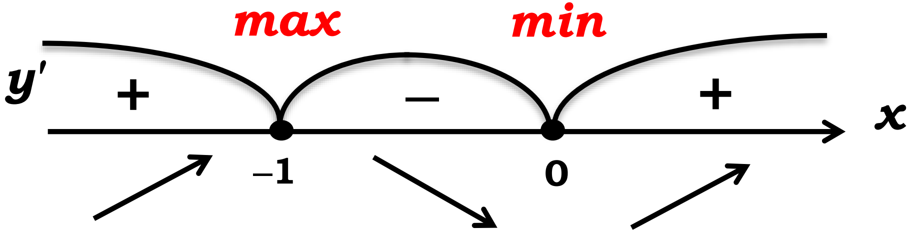
$$y'(0) = 3 \cdot 0 = 0.$$

Кожна точка екстремуму функції є критичною точкою, проте не кожна критична точка є екстремумом функції.

Достатні умови екстремуму

Якщо в критичній точці функція неперервна та її похідна <u>міняє</u> знак з плюса на мінус, то ця критична точка є точкою максимуму, а якщо з мінуса на плюс, то точкою мінімуму.

$$y = 4x^3 + 6x^2 - 8$$



Знайдемо значення функції в точках максимуму і мінімуму:

$$y_{max}(-1) = 4 \cdot (-1) + 6 - 8 = -6 \quad ;$$

$$y_{min}(0) = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$$

Загальна схема дослідження функції

1. **Знайти область визначення функції $f(x)$.**
2. **З'ясувати, чи є функція парною чи непарною (для тригонометричних функцій – періодичною)**
3. **Знайти точки перетину з осями координат (якщо їх можна знайти)**
4. **Знайти похідну цієї функції $f'(x)$ та її критичні точки (з'ясувати, в яких точках похідна дорівнює 0 або не існує)**
5. **Знайти проміжки знакосталості функції та її екстремуми**
6. **У разі необхідності, знайти координати додаткових точок, щоб уточнити поведінку графіка функції**
7. **Побудувати графік функції**

Дослідити функцію $y = 3x - x^3$ та побудувати її графік

1. Область визначення функції $\qquad$ $\boldsymbol{D(y) = R}$

2. З'ясуємо, чи є функція парною чи непарною.

$y(-x) = 3 \cdot (-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -\left(3x - x^3\right) = -y(x)$ **–**

непарна, неперіодична

3. Точки перетину з осями координат

Ох: $\boldsymbol{y = 0}$

$3x - x^3 = 0,$ $\qquad$ $x\left(3 - x^2\right) = 0$

$x = 0$ або $\quad 3 - x^2 = 0$

$x = \mp\sqrt{3}$

$\left(\sqrt{3}; 0\right), (-\sqrt{3}; 0), (0; 0)$

Оу: $\boldsymbol{x = 0}$ $\qquad$ $y(0) = 3 \cdot 0 - 0 = 0$

Дослідити функцію $y = 3x - x^3$ та побудувати її графік

4. Знайдемо похідну цієї функції та її критичні точки

$$y' = 3 - 3x^2$$

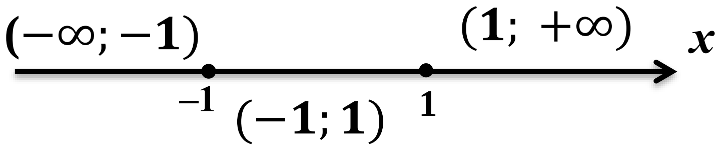
$$3 - 3x^2 = 0$$

$$3\left(1 - x^2\right) = 0$$

$$1 - x^2 = 0,$$

$$x = \mp 1$$

5. Знайдемо проміжки знакосталості функцій та її екстремуми



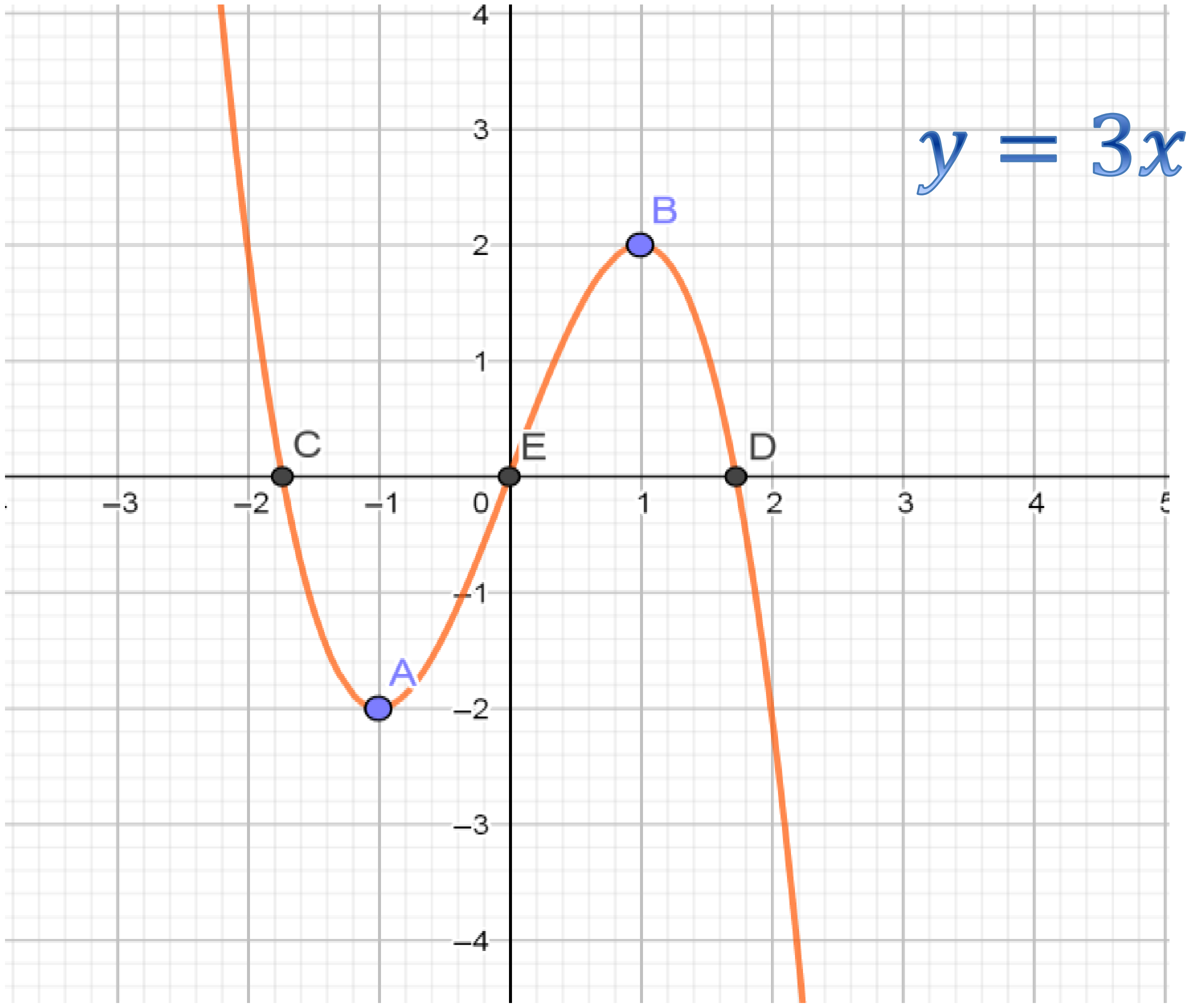
Дослідить функцію $y = 3x - x^3$ та побудувати її графік

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	$\searrow$	– 3	$\nearrow$	2	$\searrow$
		min		*max*	

Знайдемо значення функції в точках максимуму та мінімуму

$$y_{min} = y(-1) = 3 \cdot (-1) - (-1)^3 = -3 + 1 = -2$$

$$y_{max} = y(1) = 3 \cdot 1 - (-1)^3 = 3 - 1 = 2$$



$$y = 3x - x^3$$